Wahrscheinlichkeitstheorie

Florian Fink
(basierend auf Folien von Benjamin Roth, Helmut Schmid und Michaela Geierhos)

Centrum für Informations- und Sprachverarbeitung
Ludwig-Maximilian-Universität München
beroth@cis.uni-muenchen.de

Zufallsexperiment

In der Statistik geht es um die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen:

Beispiel 1: Wie wahrscheinlich ist es, dass die Summe zweier geworfener Würfel den Wert 7 ergibt?

Beispiel 2: Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Email Spam ist?

Zufallsexperiment: Experiment (Versuch) mit mehreren möglichen Ausgängen

Beispiel 3: Wurf mit zwei Würfeln

Ergebnis: Resultat eines Experimentes

Beispiel 4: 3 Augen auf Würfel 1 und 4 Augen auf Würfel 2

Stichprobe: Folge von Ergebnissen bei einem wiederholten Experiment

Ereignisraum

Ω Ergebnisraum: Menge aller möglichen Ergebnisse
$\Omega = \{\text{nom}, \text{gen}, \text{dat}, \text{acc}\}$

ω Elementarereignisse: Elemente des Ereignisraums
$\omega_i = \text{nom}|\text{gen}|\text{dat}|\text{acc}$ und $\omega_i \in \Omega$

A Ereignis: Teilmenge von Ω; d.h. $A_i \subseteq \Omega$
$A_i = \{\text{nom}, \text{dat}, \text{acc}\}$

F Ereignisraum: Menge aller möglichen Ereignismenge
(Potenzmenge von Ω)

Warhscheinlichkeitsraum I

Ein wohlgeformter Warhscheinlichkeitsraum besteht aus:

- einem Ergebnisraum Ω
- einem Ereignisraum F und
- einer Wahrscheinlichkeitsfunktion P, wobei
  - $\emptyset$ als unmögliches Ereignis und
  - Ω als sicheres Ereignis bezeichnet werden

Warhscheinlichkeitsraum II

Es gilt das Axiomensystem nach Kolmogoroff:

- **K1 Nichtnegativität**
  $P(A) \geq 0$ für alle $A \in F$
- **K2 Additivität**
  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ falls für alle A_i, A_j gilt $A_i \cap A_j$
- **K3 Normierung**
  $P(\Omega) = 1$

Elementare Warhscheinlichkeitsrechnung

Klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \sim \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Rechenregeln:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$
3. $P(\neg A) = 1 - P(A)$
4. $P(A \text{ und } B) = P(A) \times P(B)$

Bedingte und A-priori Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B)$$

- die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A eintritt, wenn Ereignis B eingetreten ist, oder
- die Wahrscheinlichkeit, dass A zutrifft, wenn B wahr ist

A priori-Wahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses vor der Betrachtung zusätzlichen Wissens $P(A)$

A posteriori-Wahrscheinlichkeit: Neue Wahrscheinlichkeit, die aus der Betrachtung zusätzlichen Wissens resultiert $P(A|B)$

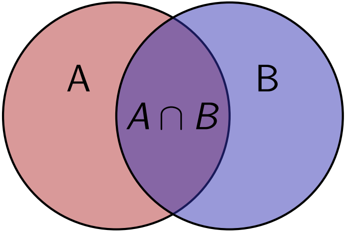
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

andere Schreibweise:

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}$$



Illustration

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Beispiel

Beispielkorpus

Das	*dete*
Der	*dete*
Haus	*nomn*
Haus	*nomn*
Baum	*nomn*

Beispielanfrage

- Ereignis A = {Wort mit Lexem=“Haus“}
- Ereignis B = {Wort mit categ=nomn}

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von A wenn B gegeben ist?

Berechnung

$$
\begin{array}{llll}
P(A = \text{'Haus'} | B = nomn) & = & & \\
P(A = \text{'Haus'}) & \times & \frac{P(B=nomn \cap A=\text{'Haus'})}{P(B=nomn)} & = \\
\frac{2}{5} & \times & 1/\frac{3}{5} & = \frac{2}{3}
\end{array}
$$

Unabhängigkeit von Ereignissen

Definition: Zwei Erignisse A und B sind *unabhängig*, wenn gilt

$$P(A|B) = P(A)$$

Sind A und B unabhängig, gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Beispiel: Es werden zwei Würfel geworfen

- Sei A das Ereignis *der 1. Wurf ist eine 6*
  $A = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$
- Sei A das Ereignis *der 1. Wurf ist eine 6*
  $A = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

Wahrscheinlichkeit A und B: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Kettenregel

Eine gemeinsame Wahrscheinlichkeit kann in ein Produkt bedingter Wahrscheinlichkeiten umgewandelt werden.

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)...P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(A_i|A_1 \cap ... \cap A_{i-1})
\end{aligned}
$$

Theorem von Bayes

Ermöglicht es, $P(B|A)$ aus $P(A|B)$ zu berechnen,
d.h. die Betrachtung der Abhängigkeitsverhältnisse umzukehren

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Regel von Bayes (vgl. Kettenregel)

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$$

Theorem von Bayes

$$P(B|A) = P(B) \times \frac{P(A|B)}{P(A)}$$

Wahrscheinlichkeitsschätzung

$$\tilde{p}(x) = \frac{n(x)}{N}$$

Die **Relative Häufigkeit** $n(x)/N$ ist die Zahl der Vorkommen (*counts*) $n(x)$ eines Ereignisses x geteilt durch die Stichprobengröße n.

Für zunehmende Stichprobengröße n, konvergiert die relative Häufigkeit zu der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

genauer: Die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit um mehr als ϵ von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit abweicht, konvergiert für zunehmende Stichprobengröße gegen 0.

Wahrscheinlichkeitsschätzung durch relative Häufigkeit

Beispiel:

- Zufallsereignis: Wortvorkommen ist ein bestimmtes Wort
- $n(x)$: Anzahl der Vorkommen (*counts*) des Wortes in einem Corpus
- N: Anzahl aller Wortvorkommen im Corpus.

Wort	n(Wort)	$\tilde{p}$(Wort)
meet		
deadline		
single		
...		

hot
stock
tip

reminder
deadline
meet
thanks

meet
hot
single

thanks
for
tip

deadline
approaching

Wahrscheinlichkeitsschätzung durch relative Häufigkeit

Beispiel:

- Zufallsereignis: Wortvorkommen ist ein bestimmtes Wort
- $n(x)$: Anzahl der Vorkommen (*counts*) des Wortes in einem Corpus
- N: Anzahl aller Wortvorkommen im Corpus.

Wort	n(Wort)	$\tilde{p}$(Wort)
meet	2	$\frac{2}{15} \approx 0.133$
deadline	2	$\frac{2}{15} \approx 0.133$
single	1	$\frac{1}{15} \approx 0.067$
...		

hot
stock
tip

reminder
deadline
meet
thanks

meet
hot
single

thanks
for
tip

deadline
approaching

Relative Häufigkeit für bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$\tilde{p}(x|y) = \frac{n(x, y)}{n_y}$$

Auch bedingte Wahrscheinlichkeiten können anhand von relativen Häufigkeiten geschätzt werden.

$n(x, y)$ ist hier die Zahl der gemeinsamen Vorkommen der Ereignisse x und y.

n_y ist die Anzahl aller Vorkommen des Ereignisses y.

Es gilt: $n_y = \sum_{x'} n(x', y)$

Relative Häufigkeit für bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Zufallsereignis x: Wortvorkommen ist ein bestimmtes Wort
- Zufallsereignis y: Wortvorkommen ist in Email einer bestimmten Kategorie, z.B. HAM oder SPAM (HAM="kein Spam")
- $n(x, y)$: Anzahl der Wortvorkommen in Emails einer Kategorie im Corpus

Wort	n(Wort, HAM)	$\tilde{p}$(Wort|HAM)	n(Wort, SPAM)	$\tilde{p}$(Wort|SPAM
meet				
deadline				
single				
...				

reminder
deadline
meet
thanks

thanks
for
tip

deadline
approaching

hot
stock
tip

meet
hot
single

Relative Häufigkeit für bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Zufallsereignis x: Wortvorkommen ist ein bestimmtes Wort
- Zufallsereignis y: Wortvorkommen ist in Email einer bestimmten Kategorie, z.B. HAM oder SPAM (HAM=“kein Spam”)
- $n(x, y)$: Anzahl der Wortvorkommen in Emails einer Kategorie im Corpus

Wort	n(Wort, HAM)	$\tilde{p}$(Wort|HAM)	n(Wort, SPAM)	$\tilde{p}$(Wort|SPAM
meet	1	$\frac{1}{9} \approx 0.111$	1	$\frac{1}{6} \approx 0.167$
deadline	2	$\frac{2}{9} \approx 0.222$	0	0
single	0	0	1	$\frac{1}{6} \approx 0.167$
...				

reminder
deadline
meet
thanks

thanks
for
tip

deadline
approaching

hot
stock
tip

meet
hot
single

Wahrscheinlichkeit für Wortsequenz

- Soweit haben wir nur Wahrscheinlichkeiten von Einzelwörtern ausgedrückt und diese geschätzt.
- Wie können wir die Wahrscheinlichkeiten von ganzen Texten (z.B. Emails) berechnen?
- Anwendung der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P(w_1, w_2, \dots, w_n)$$

$$= P(w_1)P(w_2|w_1)P(w_3|w_1, w_2)\dots P(w_n|w_1 \dots w_{n-1})$$

- $\Rightarrow$ löst das Problem nicht wirklich, denn $P(w_n|w_1 \dots w_{n-1})$ kann nicht gut geschätzt werden

Unabhängigkeitsannahme: Bag of Words

- Eine Lösung: Wir machen die statistische Annahme, dass jedes Wort unabhängig vom Vorkommen anderer Wörter ist.
- Dies nennt man auch Bag-of-words (BOW) Annahme, weil die Reihenfolge der Wörter irrelevant wird.

$$P(w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

$$= P(w_1)P(w_2|w_1)P(w_3|w_1, w_2)\ldots P(w_n|w_1 \ldots w_{n-1})$$

$$\underset{\text{Unabh.}}{=} P(w_1)P(w_2)P(w_3)\ldots P(w_n)$$

Bedingte Unabhängkeit

- Für viele Machine-Learning Algorithmen ist **bedingte Unabhängigkeit** das zentrale Konzept:
  Wenn der Wert einer Zufallsvariable y bekannt ist, sind Zufallsvariablen $x_1, \ldots, x_n$ unabhängig
- Mittelweg zwischen:
  - Keine Unabhängigkeit
  - Unabhängigkeit aller Zufallsvariablen
- In unserem Fall:

$$
\begin{aligned}
& P(w_1, w_2, \ldots, w_n | \text{SPAM}) \\
\underset{\text{bed. Unabh.}}{=} \; & P(w_1|\text{SPAM}) P(w_2|\text{SPAM}) \ldots P(w_n|\text{SPAM})
\end{aligned}
$$